**MAKALAH**



CATATAN ALJABAR LINEAR

**Disusun Oleh:**

Nama : Muhammad Nuh

Nim : 220504027

Unit : 01/2022

Dosen Pengampu : Novianda, S.T,.M.Si

**PROGRAM STUDI INFORMATIKA**

**FAKULTAS TEKNIK**

**UNIVERSITAS SAMUDRA**

**2023**

**KATA PENGANTAR**

Assalamualaikum Wr.Wb

Puji syukur saya panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya sehingga saya dapat menyelesaikan Makalah Catatan Materi Aljabar Linier. Makalah yang sudah saya susun dengan sistematis dan sebaik mungkin ini bertujuan untuk memenuhi Ujian Akhir Semester pada mata kuliah Aljabar Linier.

Dengan terselesainya Makalah ini, maka tidak lupa saya mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang terlibat dalam penyusunan Makalah ini, khususnya kepada Bapak Novianda, S.T,.M.Si selaku Dosen Pengampu.

Demikian Makalah yang saya buat, mohon kritik dan sarannya atas kekurangan dalam penyusunan laporan ini. Semoga laporan ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan bagi saya selaku penulis.

Langsa, 9 Juni 2023

Muhammad Nuh

ii

**DAFTAR ISI**

[**KATA PENGANTAR**](#page2)[**ii**](#page2)

[**DAFTAR ISI**](#page3)[**iii**](#page3)

[**MATERI I**](#page6) **…………………………………………………………………………………………………6**

[**MATRIKS DAN OPERASINYA**](#page13) **………………………………………………………………………..6**

[**Definisi**](#page6)[**6**](#page6)

[**Soal dan Kunci Jawaban**](#page9)[**4**](#page9)

[**MATERI II**](#page10)[**5**](#page10)

[**VEKTOR**](#page10)[**5**](#page10)

[**Definisi**](#page10)[**5**](#page10)

[**Soal dan Kunci Jawaban**](#page12)[**7**](#page12)

[**MATERI III**](#page13)[**8**](#page13)

[**RUANG VEKTOR**](#page13)[**8**](#page13)

[**Definisi**](#page13)[**8**](#page13)

[**Soal dan kunci jawaban**](#page14)[**9**](#page14)

[**MATERI IV**](#page16)[**11**](#page16)

[**SISTEM**](#page16) **PERSAMAAN LINEAR** [**11**](#page16)

[**Definisi**](#page16)[**11**](#page16)

[**Soal dan Kunci jawaban**](#page16)[**11**](#page16)

[**MATERI V**](#page18)[**13**](#page18)

[**TRANS**](#page18)**FORMASI LINEAR** [**13**](#page18)

[**Definisi**](#page18)[**13**](#page18)

[**Soal dan Kunci Jawaban**](#page19)[**14**](#page19)

[**MATERI VI**](#page20)[**15**](#page20)

[**ORTOGONALITAS**](#page20) **DAN PROYEKSI** [**15**](#page20)

[**Definisi**](#page20)[**15**](#page20)

[**Soal dan Kunci jawaban**](#page21)[**16**](#page21)

[**MATERI VII**](#page24)[**19**](#page24)

[**RUANG**](#page24) **VEKTOR BERDIMENSI TAK TERBATAS** [**19**](#page24)

[**Definisi**](#page24)[**19**](#page24)

iii

[**Soal dan Kunci jawaban**](#page25)[**20**](#page25)

[**MATERI VIII**](#page27)[**22**](#page27)

[**DETERMIAN**](#page27)[**22**](#page27)

**RUANG SUBVEKTOR** [**22**](#page27)

[**Soal dan Kunci jawaban**](#page29)[**24**](#page29)

iv

**DAFTAR GAMBAR**

GAMBAR 1.1 PERSAMAAN LINEAR ………………………………………………………………………. 10

GAMBAR 1.2 CONTOH RUANG SUBVEKTOR …………………………………………………………… 21

V

**MATERI 1**

**MATRIKS DAN OPERASINYA**

**Definisi Matriks :**

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari sebuah bilangan yang dibatasi dengan suatu tanda kurung (). Suatu matriks dapat terusun atas baris dan kolom, jika suatu matriks tersusun atas p baris dan q kolom maka dapat dikatakan matriks tersebut berukuran (berordo) p x q. Pada penulisan matriks biasanya dengan menggunakan huruf besar A, B, C dan seterusny, dan sedangkan penulisan matriks berserta ukurran (matriks dengan p baris dan q kolom) adalah Apxq, Bpxq dan seterusnya.

Rumus dari Matriks :

Penjumlahan Matriks:Untuk menjumlahkan dua matriks A dan B dengan ukuran yang sama (misalnya matriks n x m), jumlahkan setiap elemen matriks pada posisi yang sama. Hasilnya adalah matriks yang memiliki ukuran yang sama dengan matriks A dan B.Notasi: C = A + BRumus: c\_ij = a\_ij + b\_ij Pengurangan Matriks:Untuk mengurangkan dua matriks A dan B dengan ukuran yang sama (misalnya matriks n x m), kurangkan setiap elemen matriks pada posisi yang sama. Hasilnya adalah matriks yang memiliki ukuran yang sama dengan matriks A dan B.Notasi: C = A - BRumus: c\_ij = a\_ij - b\_ij Perkalian Matriks dengan Skalar:Untuk mengalikan sebuah matriks A dengan sebuah skalar k, kalikan setiap elemen matriks A dengan k. Hasilnya adalah matriks yang memiliki ukuran yang sama dengan matriks A.Notasi: B = kARumus: b\_ij = k x a\_ij Perkalian Matriks:Untuk mengalikan dua matriks A dan B, pastikan jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B. Hasil perkalian matriks A dan B adalah matriks C yang memiliki ukuran n x p (n adalah jumlah baris matriks A dan p adalah jumlah kolom matriks B).Notasi: C = A x BRumus: c\_ij = a\_i1 x b\_1j + a\_i2 x b\_2j + ... + a\_in x b\_nj Transpose Matriks:Untuk mentranspos sebuah matriks A dengan ukuran n x m, posisi elemen diubah sehingga elemen yang berada di baris i dan kolom j menjadi elemen yang berada di baris j dan kolom i dalam matriks transpos.Notasi: B

Rumus: b\_ij = a\_ji

6

Soal :

Soal 1:Diberikan dua matriks A dan B. Hitung hasil perkalian matriks A dengan matriks B.Matriks A:| 2 3 || 4 1 |Matriks B:| 5 1 || 2 3 |Jawaban 1:Matriks hasil perkalian A x B:| (25 + 32) (21 + 33) || (45 + 12) (41 + 13) || 16 11 || 22 7 |Soal 2:Diberikan dua matriks A dan B. Hitung hasil penjumlahan matriks A dengan matriks B.Matriks A:| 3 1 || 2 -2 |Matriks B:| 4 5 ||-1 3 |Jawaban 2:Matriks hasil penjumlahan A + B:| 3 + 4 1 + 5 || 2 + (-1) -2 + 3 || 7 6 || 1 1 |

7

**MATERI 2**

**VEKTOR**

Vektor adalah suatu objek matematika yang memiliki magnitude (besaran) dan arah. Vektor sering digunakan untuk merepresentasikan besaran fisik seperti kecepatan, gaya, atau perpindahan dalam ruang.Pada umumnya, vektor dituliskan menggunakan huruf dengan tanda panah di atasnya (misalnya, 𝐯 →). Notasi vektor biasanya terdiri dari komponen-komponen yang menggambarkan besaran dan arah vektor tersebut. Dalam ruang tiga dimensi, vektor biasanya dinyatakan sebagai kombinasi linear dari tiga komponen x, y, dan z.Misalnya, dalam ruang tiga dimensi, vektor 𝐯 → dapat dinyatakan sebagai:𝐯 → = 𝑥𝐢̂ + 𝑦𝐣̂ + 𝑧𝐤̂di mana 𝐢̂, 𝐣̂, dan 𝐤̂ adalah vektor-vektor satuan (unit vectors) yang mewakili sumbu x, y, dan z secara berurutan.Selain itu, vektor juga dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks kolom atau matriks baris, tergantung pada konvensi yang digunakan.Rumus yang sering digunakan dalam operasi vektor meliputi:Penjumlahan Vektor:Jika 𝐮 → = 𝑥𝐢̂ + 𝑦𝐣̂ + 𝑧𝐤̂ dan 𝐯 → = 𝑎𝐢̂ + 𝑏𝐣̂ + 𝑐𝐤̂, maka penjumlahan vektor dapat dinyatakan sebagai:𝐮 → + 𝐯 → = (𝑥 + 𝑎)𝐢̂ + (𝑦 + 𝑏)𝐣̂ + (𝑧 + 𝑐)𝐤̂Pengurangan Vektor:Jika 𝐮 → = 𝑥𝐢̂ + 𝑦𝐣̂ + 𝑧𝐤̂ dan 𝐯 → = 𝑎𝐢̂ + 𝑏𝐣̂ + 𝑐𝐤̂, maka pengurangan vektor dapat dinyatakan sebagai:𝐮 → - 𝐯 → = (𝑥 - 𝑎)𝐢̂ + (𝑦 - 𝑏)𝐣̂ + (𝑧 - 𝑐)𝐤̂Skalar Vektor:Jika 𝐯 → = 𝑎𝐢̂ + 𝑏𝐣̂ + 𝑐𝐤̂ dan 𝑘 adalah skalar, maka perkalian skalar vektor dapat dinyatakan sebagai:𝑘𝐯 → = 𝑘(𝑎𝐢̂ + 𝑏𝐣̂ + 𝑐𝐤̂) = (𝑘𝑎)𝐢̂ + (𝑘𝑏)𝐣̂ + (𝑘𝑐)𝐤̂Dot Product (Produk Skalar):Jika 𝐮 → = 𝑥𝐢̂ + 𝑦𝐣̂ + 𝑧𝐤̂ dan 𝐯 → = 𝑎𝐢̂ + 𝑏𝐣̂ + 𝑐𝐤̂, maka dot product (produk skalar) antara dua vektor dapat dinyatakan sebagai:𝐮 → ⋅ 𝐯 → = (𝑥𝐢̂ + 𝑦𝐣̂ + 𝑧𝐤̂) ⋅ (𝑎𝐢̂ + 𝑏𝐣̂ + 𝑐𝐤̂) = 𝑥𝑎 + 𝑦𝑏 + 𝑧𝑐Cross Product (Produk Vektor):Jika 𝐮 → = 𝑥𝐢̂ + 𝑦𝐣̂ + 𝑧𝐤̂ dan 𝐯 → = 𝑎𝐢̂ + 𝑏𝐣̂ + 𝑐𝐤̂, maka cross product (produk vektor) antara dua vektor dapat dinyatakan sebagai:𝐮 → × 𝐯 → = (𝑦𝐤 - 𝑧𝐣)𝐢̂ + (𝑧𝐢 - 𝑥𝐤)𝐣̂ + (𝑥𝐣 - 𝑦𝐢)𝐤̂

8

Soal :

Soal 1:Diberikan dua vektor 𝐮 → = 3𝐢̂ - 2𝐣̂ + 𝐤̂ dan 𝐯 → = 2𝐢̂ + 4𝐣̂ - 𝐤̂. Hitunglah hasil penjumlahan 𝐮 → + 𝐯 →.Jawaban 1:𝐮 → + 𝐯 → = (3𝐢̂ - 2𝐣̂ + 𝐤̂) + (2𝐢̂ + 4𝐣̂ - 𝐤̂) = (3 + 2)𝐢̂ + (-2 + 4)𝐣̂ + (1 - 1)𝐤̂ = 5𝐢̂ + 2𝐣̂Jadi, hasil penjumlahan 𝐮 → + 𝐯 → adalah 5𝐢̂ + 2𝐣̂.Soal 2:Diberikan vektor 𝐚 → = 2𝐢̂ - 𝐣̂ + 3𝐤̂ dan 𝐛 → = 𝐢̂ + 2𝐣̂ - 𝐤̂. Hitunglah hasil perkalian skalar antara 𝐚 → dan 𝐛 →.Jawaban 2:𝐚 → ⋅ 𝐛 → = (2𝐢̂ - 𝐣̂ + 3𝐤̂) ⋅ (𝐢̂ + 2𝐣̂ - 𝐤̂) = (2 ⋅ 1) + (-1 ⋅ 2) + (3 ⋅ -1) = 2 - 2 - 3 = -3Jadi, hasil perkalian skalar antara 𝐚 → dan 𝐛 → adalah -3.Soal 3:Diberikan vektor 𝐩 → = 4𝐢̂ + 3𝐣̂ dan 𝐪 → = -2𝐢̂ + 𝐣̂. Hitunglah hasil cross product antara 𝐩 → dan 𝐪 →.Jawaban 3:𝐩 → × 𝐪 → = (4𝐣̂ - 3𝐣̂)𝐢̂ + (-(4𝐢̂) - (-2𝐣̂))𝐣̂ + (4𝐢̂ - 3(-2𝐢̂))𝐤̂ = 𝐣̂ + 2𝐢̂ + 10𝐤̂

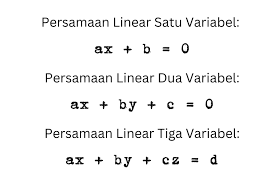
9

**MATERI 3**

**SISTEM PERSAMAAN LINEAR**

Sistem persamaan linear adalah kumpulan persamaan linear yang saling terkait dan harus dipenuhi secara bersama-sama. Setiap persamaan dalam sistem tersebut mengandung beberapa variabel yang harus ditemukan nilainya agar sistem persamaan tersebut terpenuhi.Secara umum, sistem persamaan linear dapat ditulis dalam bentuk:a₁₁x₁ + a₁₂x₂ + ... + a₁ₙxₙ = b₁a₂₁x₁ + a₂₂x₂ + ... + a₂ₙxₙ = b₂...aₘ₁x₁ + aₘ₂x₂ + ... + aₘₙxₙ = bₘdi mana x₁, x₂, ..., xₙ adalah variabel yang harus dicari, aᵢⱼ adalah koefisien, dan bᵢ adalah konstanta.

Rumus umum dari sistem persamaan linear dengan n persamaan dan n variabel adalah sebagai berikut:a₁₁x₁ + a₁₂x₂ + b + a₁ₙxₙ = b₁a₂₁x₁ + a₂₂x₂ + b + a₂ₙxₙ = b₂aₙ₁x₁ + aₙ₂x₂ + b + aₙₙxₙ = bₙdi mana x₁, x₂, ..., xₙ adalah variabel yang harus dicari, aᵢⱼ adalah koefisien, dan bᵢ adalah konstanta pada masing-masing persamaan.



Gambar 1.1 persamaan linear

10

Soal:

Tentukan solusi dari sistem persamaan linear berikut:2x + 3y = 104x - y = 5Jawaban :

Langkah 1: Mari kita selesaikan sistem persamaan ini menggunakan metode eliminasi Gauss.Menggunakan eliminasi Gauss, kita dapat menghilangkan variabel y pada persamaan kedua dengan mengalikan persamaan pertama dengan 4 dan persamaan kedua dengan 3, kemudian mengurangkan hasilnya.(4)(2x + 3y) = (4)(10) --> 8x + 12y = 40(3)(4x - y) = (3)(5) --> 12x - 3y = 15Kemudian kita kurangkan persamaan kedua dari persamaan pertama:(8x + 12y) - (12x - 3y) = 40 - 158x + 12y - 12x + 3y = 25-4x + 15y = 25 --> Persamaan (1)Langkah 2:

Sekarang kita dapat menggunakan persamaan (1) untuk mencari nilai x atau y. Dalam hal ini, kita akan mencari nilai y.Misalkan -4x + 15y = 25, kemudian kita atur x = 0 untuk mencari y.-4(0) + 15y = 2515y = 25y = 25/15y = 5/3Langkah 3:

Setelah menemukan nilai y, kita dapat menggantinya ke salah satu persamaan asli untuk mencari nilai x. Dalam hal ini, kita akan menggunakan persamaan pertama.2x + 3(5/3) = 102x + 5 = 102x = 10 - 52x = 5x = 5/2Jadi, solusi dari sistem persamaan linear adalah x = 5/2 dan y = 5/3.

11

**MATERI 4**

**TRANSFORMASI LINEAR**

**Transformasi linear (atau sering disebut pemetaan linear) adalah suatu fungsi atau operasi matematika yang memetakan suatu vektor dari suatu ruang vektor ke ruang vektor lainnya dengan mempertahankan sifat-sifat linier. Transformasi linear memperhatikan struktur linear dari ruang vektor, yang melibatkan operasi penjumlahan vektor dan perkalian dengan skalar.Secara formal, transformasi linear 𝑇 adalah suatu fungsi dari ruang vektor 𝑉 ke ruang vektor 𝑊, yang memenuhi dua properti:Tertutup terhadap operasi penjumlahan vektor: Untuk setiap vektor 𝑢 dan 𝑣 dalam 𝑉, hasil penjumlahan 𝑇(𝑢 + 𝑣) sama dengan penjumlahan transformasi 𝑇(𝑢) + 𝑇(𝑣) di ruang vektor 𝑊.𝑇(𝑢 + 𝑣) = 𝑇(𝑢) + 𝑇(𝑣)Tertutup terhadap operasi perkalian dengan skalar: Untuk setiap vektor 𝑢 dalam 𝑉 dan skalar 𝑎, hasil perkalian dengan skalar 𝑇(𝑎𝑢) sama dengan perkalian transformasi 𝑎𝑇(𝑢) di ruang vektor 𝑊.𝑇(𝑎𝑢) = 𝑎𝑇(𝑢)Dengan kata lain, transformasi linear mempertahankan struktur linear dari ruang vektor, yang melibatkan properti seperti penjumlahan dan perkalian dengan skalar.**

Rumus :

Misalnya, jika kita memiliki vektor 𝑣 = (𝑥, 𝑦, 𝑧)ᵀ dalam ruang tiga dimensi, dan transformasi linear memetakan vektor tersebut ke ruang dua dimensi 𝑊, maka rumus transformasi linear dapat ditulis sebagai:𝑇(𝑣) = 𝐴𝑣𝑇(𝑥, 𝑦, 𝑧) = 𝑎₁₁𝑥 + 𝑎₁₂𝑦 + 𝑎₁₃𝑧𝑎₂₁𝑥 + 𝑎₂₂𝑦 + 𝑎₂₃𝑧Dalam contoh ini, 𝐴 adalah matriks 2 × 3.

12

**Soal :**

Diberikan transformasi linear 𝑇 yang memetakan vektor-vektor dari ruang vektor 𝑅² ke ruang vektor 𝑅³, dengan rumus transformasi sebagai berikut:𝑇(𝑥, 𝑦) = (2𝑥 + 3𝑦, 𝑥 - 𝑦, 4𝑥 + 2𝑦)a) Tentukan matriks transformasi 𝐴 yang sesuai dengan transformasi linear ini.b) Hitung hasil transformasi dari vektor 𝑣 = (1, 2)ᵀ.Jawaban:a) Untuk menentukan matriks transformasi 𝐴, kita perlu melihat bagaimana transformasi linear mempengaruhi vektor-vektor dasar. Dalam hal ini, kita akan melihat bagaimana transformasi linear memetakan vektor (1, 0)ᵀ dan (0, 1)ᵀ.𝑇(1, 0) = (2(1) + 3(0), 1 - 0, 4(1) + 2(0)) = (2, 1, 4)𝑇(0, 1) = (2(0) + 3(1), 0 - 1, 4(0) + 2(1)) = (3, -1, 2)Matriks transformasi 𝐴 adalah matriks yang terdiri dari kolom-kolom vektor hasil transformasi vektor-vektor dasar tersebut:𝐴 = [(2, 3), (1, -1), (4, 2)]b) Untuk menghitung hasil transformasi dari vektor 𝑣 = (1, 2)ᵀ, kita dapat menggunakan rumus transformasi linear 𝑇(𝑥, 𝑦) = (2𝑥 + 3𝑦, 𝑥 - 𝑦, 4𝑥 + 2𝑦):𝑇(1, 2) = (2(1) + 3(2), 1 - 2, 4(1) + 2(2)) = (8, -1, 8)Jadi, hasil transformasi dari vektor 𝑣 = (1, 2)ᵀ adalah (8, -1, 8).

13

**MATERI 5**

**ORTOGONALITAS DAN PROYEKSI**

Ortogonalitas adalah konsep dalam matematika yang mengacu pada hubungan keortogonalan antara vektor-vektor. Dua vektor dikatakan ortogonal jika sudut antara mereka adalah sudut siku-siku, yaitu 90 derajat. Dalam ruang vektor dengan produk dalam titik (dot product), dua vektor 𝑢 dan 𝑣 dianggap ortogonal jika 𝑢 · 𝑣 = 0, di mana · mewakili operasi dot product.Proyeksi adalah operasi untuk memproyeksikan suatu vektor ke ruang vektor yang lebih rendah dimensinya. Proyeksi vektor dilakukan pada suatu subruang atau basis tertentu. Hasil proyeksi adalah vektor baru yang merupakan proyeksi vektor asli ke subruang tersebut. Proyeksi memiliki sifat bahwa hasil proyeksi berada dalam subruang yang ditentukan dan merupakan vektor terdekat dengan vektor asli dalam subruang tersebut.Dalam proyeksi ortogonal, proyeksi dilakukan pada subruang ortogonal. Proyeksi ortogonal dari suatu vektor ke subruang ortogonal menghasilkan vektor baru yang berada dalam subruang tersebut dan saling ortogonal terhadap subruang yang lain.Ortogonalitas dan proyeksi adalah konsep penting dalam aljabar linear dan memiliki berbagai aplikasi. Ortogonalitas digunakan dalam pembentukan basis ortogonal, penguraian vektor, dan transformasi ortogonal. Proyeksi digunakan dalam analisis regresi, pengolahan sinyal, geometri komputer, dan banyak aplikasi lainnya di mana pengurangan dimensi atau penyesuaian vector.

Rumus :

Rumus Ortogonalitas:Dalam konteks aljabar linear, untuk memeriksa apakah dua vektor 𝑢 dan 𝑣 ortogonal, kita dapat menggunakan rumus produk dalam titik (dot product):𝑢 · 𝑣 = 0Jika hasil dot product antara 𝑢 dan 𝑣 adalah nol, maka vektor-vektor tersebut ortogonal.Rumus Proyeksi:Proyeksi vektor 𝑣 ke suatu subruang 𝑈 dapat dinyatakan dengan menggunakan rumus proyeksi ortogonal:𝑃(𝑣) = 𝑣̂ = 𝑣̂𝑈 = 𝑣̂𝑢Di mana:𝑃(𝑣) adalah proyeksi dari vektor 𝑣.𝑢 adalah vektor unit (vektor dengan panjang/magnitudo 1) yang menggambarkan arah subruang 𝑈.𝑣̂ adalah proyeksi ortogonal dari 𝑣 ke subruang 𝑈.Rumus proyeksi 𝑣̂𝑢 dihitung menggunakan rumus dot product:

14

𝑣̂𝑢 = (𝑣 · 𝑢) 𝑢Jadi, proyeksi dari vektor 𝑣 ke subruang 𝑈 adalah hasil perkalian dot product antara 𝑣 dan 𝑢, kemudian dikalikan dengan 𝑢.Penting untuk dicatat bahwa rumus proyeksi tergantung pada subruang atau basis yang digunakan dalam proyeksi. Jika proyeksi dilakukan pada subruang ortogonal, vektor unit yang digunakan akan merupakan vektor ortogonal dalam subruang tersebut.

Soal :

Soal Ortogonalitas:Tentukan apakah vektor-vektor berikut ortogonal atau tidak:𝑢 = (1, -2, 3)𝑣 = (2, 4, -1)Jawaban:Untuk menentukan apakah dua vektor ortogonal, kita perlu menghitung dot product antara mereka.𝑢 · 𝑣 = (1)(2) + (-2)(4) + (3)(-1) = 2 - 8 - 3 = -9Karena hasil dot product antara 𝑢 dan 𝑣 bukan nol, vektor-vektor ini tidak ortogonal.

Soal Proyeksi:Diberikan vektor 𝑣 = (3, 1, 2) dan subruang 𝑈 yang ditentukan oleh basis 𝑏₁ = (1, 0, -1) dan 𝑏₂ = (0, 1, 2). Tentukan proyeksi vektor 𝑣 ke subruang 𝑈.Jawaban:Untuk menentukan proyeksi vektor 𝑣 ke subruang 𝑈, kita perlu menghitung dot product antara 𝑣 dan vektor unit yang menggambarkan arah subruang 𝑈.Langkah 1: Menghitung vektor unit 𝑢 sebagai arah subruang 𝑈.𝑢 = 𝑏₁/‖𝑏₁‖ = (1, 0, -1) / √(1² + 0² + (-1)²) = (1, 0, -1)/√2 = (1/√2, 0, -1/√2)Langkah 2: Menghitung proyeksi 𝑣̂ = (𝑣 · 𝑢) 𝑢𝑣̂ = (3, 1, 2) · (1/√2, 0, -1/√2) \* (1/√2, 0, -1/√2)= (3/√2 - 2/√2) \* (1/√2, 0, -1/√2)= (1/√2, 0, -1/√2)Jadi, proyeksi vektor 𝑣 ke subruang 𝑈 adalah 𝑣̂ = (1/√2, 0, -1/√2).

15

**MATERI 6**

**RUANG VEKTOR BERDIMENSI TAK TERBATAS**

Ruang vektor berdimensi tak terbatas, juga dikenal sebagai ruang vektor tak hingga atau ruang vektor tak terbatas, merujuk pada ruang vektor yang memiliki jumlah dimensi yang tak terbatas atau tidak terbatas. Dalam ruang vektor berdimensi tak terbatas, vektor dapat memiliki sejumlah komponen tak terhingga.Dalam ruang vektor berdimensi tak terbatas, setiap vektor dapat direpresentasikan sebagai rangkaian tak terhingga dari komponen-komponen yang membentuk vektor tersebut. Misalnya, dalam ruang vektor berdimensi tak terbatas 𝑅ⁿ (ruang vektor dimensi tak terbatas), sebuah vektor dapat direpresentasikan sebagai (𝑥₁, 𝑥₂, 𝑥₃, ...), di mana 𝑥₁, 𝑥₂, 𝑥₃, ... adalah komponen-komponen tak terbatas dari vektor tersebut.Ruang vektor berdimensi tak terbatas memiliki sifat dan operasi yang sama seperti ruang vektor berdimensi terbatas. Misalnya, ruang vektor berdimensi tak terbatas tetap memenuhi properti penjumlahan vektor, perkalian dengan skalar, dan distributifitas. Namun, ruang vektor berdimensi tak terbatas memiliki kekhasan dimana operasi-operasi tersebut melibatkan sejumlah tak terbatas komponen.Ruang vektor berdimensi tak terbatas sering digunakan dalam berbagai bidang seperti matematika, fisika, ekonomi, dan ilmu komputer, di mana konsep ruang vektor tak terbatas diterapkan untuk menganalisis dan memodelkan fenomena yang melibatkan variabel tak terbatas atau berkelanjutan.

Rumus :

Penjumlahan Vektor:Jika 𝑢 = (𝑢₁, 𝑢₂, 𝑢₃, ...) dan 𝑣 = (𝑣₁, 𝑣₂, 𝑣₃, ...) adalah vektor dalam ruang vektor berdimensi tak terbatas, maka penjumlahan vektor tersebut didefinisikan sebagai:𝑢 + 𝑣 = (𝑢₁ + 𝑣₁, 𝑢₂ + 𝑣₂, 𝑢₃ + 𝑣₃, ...)Perkalian Skalar:

Jika 𝑢 = (𝑢₁, 𝑢₂, 𝑢₃, ...) adalah vektor dalam ruang vektor berdimensi tak terbatas dan 𝑎 adalah skalar, maka perkalian skalar didefinisikan sebagai:𝑎𝑢 = (𝑎𝑢₁, 𝑎𝑢₂, 𝑎𝑢₃, ...)Distributifitas:

Distributifitas penjumlahan vektor dan perkalian skalar dalam ruang vektor berdimensi tak terbatas tetap berlaku seperti pada ruang vektor berdimensi terbatas. Misalnya:𝑎(𝑢 + 𝑣) = 𝑎𝑢 + 𝑎𝑣dan(𝑎 + 𝑏)𝑢 = 𝑎𝑢 + 𝑏𝑢

16

Pada dasarnya, rumus-rumus ini mencerminkan prinsip dasar operasi dalam ruang vektor berdimensi tak terbatas. Namun, perlu diingat bahwa dalam praktiknya, manipulasi aljabar dalam ruang vektor berdimensi tak terbatas sering melibatkan penjumlahan dan perkalian dengan jumlah tak terbatas komponen vektor.

Soal :

Misalkan kita memiliki ruang vektor berdimensi tak terbatas 𝑅ⁿ, di mana vektor-vektor dalam ruang ini terdiri dari bilangan real tak terbatas (misalnya, (𝑥₁, 𝑥₂, 𝑥₃, ...)).Penjumlahan Vektor:Misalkan kita memiliki dua vektor 𝑢 = (1, 2, 3, ...) dan 𝑣 = (-1, 0, 1, ...). Kita dapat menjumlahkan vektor-vektor tersebut dengan menjumlahkan komponen-komponennya:𝑢 + 𝑣 = (1 + (-1), 2 + 0, 3 + 1, ...) = (0, 2, 4, ...)Perkalian Skalar:Misalkan kita ingin mengalikan vektor 𝑢 = (1, 2, 3, ...) dengan skalar 2. Kita dapat mengalikan setiap komponen vektor dengan skalar:2𝑢 = (2 \* 1, 2 \* 2, 2 \* 3, ...) = (2, 4, 6, ...)Distributifitas:Misalkan kita memiliki vektor 𝑢 = (1, 2, 3, ...) dan 𝑣 = (-1, 0, 1, ...) serta skalar 2 dan 3. Kita dapat menggunakan distributifitas untuk menggabungkan operasi penjumlahan dan perkalian skalar:2(𝑢 + 𝑣) = 2(1 + (-1), 2 + 0, 3 + 1, ...) = 2(0, 2, 4, ...) = (0, 4, 8, ...)(2 + 3)𝑢 = 5𝑢 = 5(1, 2, 3, ...) = (5, 10, 15, ...)

17

**MATERI 7**

**DETERMINAN**

Determinan adalah sebuah nilai skalar yang diperoleh dari matriks persegi. Determinan menggambarkan sifat-sifat geometris, aljabar, dan invertibilitas matriks.Untuk matriks persegi 𝐴 dengan ukuran 𝑛 × 𝑛, determinan dilambangkan dengan simbol det(𝐴) atau |𝐴|. Determinan hanya dapat dihitung untuk matriks persegi, yaitu matriks yang memiliki jumlah baris sama dengan jumlah kolom.Rumus determinan dapat bervariasi tergantung pada ukuran matriksnya. Berikut adalah rumus determinan untuk matriks berukuran 2x2 dan 3x3:Matriks 2x2:Untuk matriks 2x2 dengan elemen 𝑎, 𝑏, 𝑐, dan 𝑑, determinan dinyatakan dengan rumus:|𝐴| = 𝑎𝑑 − 𝑏𝑐Matriks 3x3:Untuk matriks 3x3 dengan elemen-elemen 𝑎₁, 𝑎₂, 𝑎₃, 𝑏₁, 𝑏₂, 𝑏₃, 𝑐₁, 𝑐₂, 𝑐₃, determinan dinyatakan dengan rumus:|𝐴| = 𝑎₁(𝑏₂𝑐₃ − 𝑏₃𝑐₂) − 𝑎₂(𝑏₁𝑐₃ − 𝑏₃𝑐₁) + 𝑎₃(𝑏₁𝑐₂ − 𝑏₂𝑐₁)Determinan memiliki beberapa sifat penting, di antaranya:Jika determinan suatu matriks adalah nol (|𝐴| = 0), maka matriks tersebut disebut matriks singuler atau tidak dapat diinvers.Jika determinan suatu matriks bukan nol (|𝐴| ≠ 0), maka matriks tersebut disebut matriks non-singular atau dapat diinvers.Jika dua baris atau kolom matriks ditukar, tanda determinan akan berubah menjadi negatif.Jika satu baris atau kolom matriks dikalikan dengan skalar 𝑘, determinan akan dikalikan dengan skalar 𝑘.Determinan memiliki banyak aplikasi dalam aljabar linear, transformasi linier, dan dalam menentukan sifat dan solusi dari sistem persamaan linear.

18

Soal 1 :

Hitunglah matriks berikut ini

| 3 4 |

| 2 -1 |

Jawaban 1:Determinan dari matriks tersebut dapat dihitung dengan rumus ad-bc. Berdasarkan matriks di atas, determinan dapat dihitung sebagai berikut:

Determinan = (3 x -1) - (4 x 2)

= -3 - 8

= -11

Soal 2 :

Hitunglah nilai x yang memenuhi syarat berikut ini

| 2x -3 4 |

| 1 x 2 |

| 3 2 2x |

Jawaban 2:

Nilai x dapat ditentukan dengan menggunakan sifat bahwa determinan suatu matriks adalah nol jika dan hanya jika matriks tersebut singuler. Jadi, untuk mencari nilai x yang memenuhi persamaan di atas, kita harus mencari determinan matriks tersebut dan mengatur nilainya menjadi nol:

Determinan = (2x \* x \* 2) + (3 \* 1 \* 4) + (-3 \* 2 \* 3) - (2 \* x \* 3) - (4 \* 1 \* 2x) - (2 \* -3 \* 2)= 4x^2 + 12 + (-18) - 6x - 16x - 12= 4x^2 - 22x – 18

19

**MATERI 8**

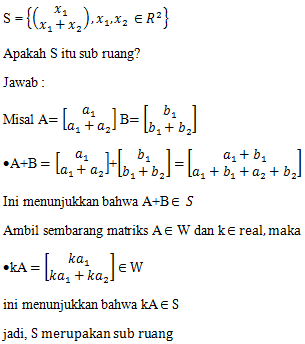
**RUANG SUBVEKTOR**

Ruang subvektor atau subruang vektor adalah himpunan vektor-vektor yang merupakan subset dari suatu ruang vektor yang memenuhi beberapa sifat tertentu. Dalam konteks aljabar linier, ruang subvektor adalah ruang vektor yang terbentuk dari kombinasi linear vektor-vektor tertentu.

Rumus ruang subvektor:

Rumus untuk menentukan ruang subvektor dalam aljabar linier bergantung pada cara himpunan vektor-vektor dalam ruang tersebut didefinisikan. Berikut adalah beberapa rumus umum yang digunakan untuk menggambarkan ruang subvektor:Ruang Subvektor dari Vektor-vektor:Jika vektor-vektor v1, v2, ..., vn adalah vektor-vektor dalam suatu ruang vektor V, maka ruang subvektor yang terbentuk oleh vektor-vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:Span{v1, v2, ..., vn} = {a1v1 + a2v2 + ... + anv\_n | a1, a2, ..., an adalah skalar}Rumus ini menunjukkan bahwa ruang subvektor adalah himpunan semua kombinasi linear dari vektor-vektor tersebut dengan menggunakan skalar sebagai faktor.Ruang Subvektor dari Matriks:Dalam konteks matriks, ruang subvektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan matriks kolom sebagai vektor-vektor. Jika A adalah suatu matriks dengan kolom-kolom vektor v1, v2, ..., vn, maka ruang subvektor yang terbentuk oleh kolom-kolom tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:Col(A) = Span{v1, v2, ..., vn}Rumus ini menunjukkan bahwa ruang subvektor adalah ruang vektor yang dihasilkan oleh kolom-kolom matriks.Ruang Subvektor Nol:Ruang subvektor nol, biasanya dilambangkan dengan {0}, terdiri dari hanya vektor nol. Dalam setiap ruang vektor, ruang subvektor nol selalu ada dan termasuk dalam ruang subvektor.

20



Gambar 1.2 contoh soal ruang subvektor

Soal 1:Diberikan vektor-vektor berikut dalam ruang vektor R3:v1 = (1, 2, 3)v2 = (-1, 0, 1)v3 = (2, 4, 6)Tentukan apakah vektor v4 = (3, 6, 9) berada dalam ruang subvektor yang dihasilkan oleh vektor-vektor tersebut.Jawaban 1:Untuk menentukan apakah vektor v4 berada dalam ruang subvektor yang dihasilkan oleh vektor-vektor v1, v2, dan v3, kita perlu melihat apakah v4 dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari v1, v2, dan v3. Kita dapat menggunakan rumus ruang subvektor untuk melakukan hal ini.Kita perlu mencari skalar a1, a2, dan a3 sedemikian sehingga:a1 \* v1 + a2 \* v2 + a3 \* v3 = v4Menggantikan nilai vektor-vektor yang diberikan, kita punya:a1 \* (1, 2, 3) + a2 \* (-1, 0, 1) + a3 \* (2, 4, 6) = (3, 6, 9)Ini menghasilkan sistem persamaan linear:a1 - a2 + 2a3 = 32a1 + 4a3 = 63a1 + a2 + 6a3 = 9

21

**DAFTAR PUSTAKA**

https://www.google.com/search?sxsrf=APwXEddZanUV4LqEg47MkoePZfl9znznCA

<https://id.wikipedia.org/wiki/Aljabar_linear>

<http://p2k.unkris.ac.id/id3/3065-2962/Aljabar-Linear_27403_p2k-unkris.html>

<https://aljabarlinear.mipa.ugm.ac.id/ruang-vektor/subruang-vektor/>

<https://danisuandi.wordpress.com/mata-kuliah/kuliah-aljabar-linear/>

22